Deducción Natural en Lógica Proposicional

Curso 2014-2015

Mari Carmen Suárez de Figueroa Baonza
mcsuarez@fi.upm.es

POLITÉCNICA

enidos

- é es una deducción?
- ulo Deductivo
- emas Formales
- Sistema Formal para la Lógica Proposicional
- ucción Natural: Reglas de Inferencia

es una Deducción? (I)

ego de lógica: Se ha robado un importante botín. El nal (o criminales) se dio a la fuga en un coche. and Yard decide interrogar a tres sospechosos, Andy Bill (B) y Carl (C), y consigue determinar los entes hechos:

n el robo no está implicada ninguna otra persona salvo A, B o C

C nunca trabaja sin llevar a A (y es posible que otros) como nplice

B no sabe conducir

ndy culpable o inocente?

es una Deducción? (II)

ɔs como éste consisten en **deducir** la información ;e pide a partir de la información dada

este caso la información que se pide es determinar si Andy es ɔable

ıos un par de modos típicos de razonar para tar resolver el juego:

ucción al absurdo

eba por casos

es una Deducción? (III)

ıodo típico de razonar: **Reducción al absurdo**

ngamos que A es inocente

lo que C nunca trabaja sin A, si A es inocente, C debe ser ıbién inocente

lo que el criminal huyó en coche y que B no sabe conducir, B no o cometer el robo solo:

tuvo que ir con A o con C. Así que si A y C son inocentes, B también es inocente

que si A es inocente, también lo son B y C.

o sabemos que *al menos uno* es culpable

anto, no puede ser que A sea inocente

es una Deducción? (IV)

modo típico de razonar: **Prueba por casos**

emos 3 posibilidades: A, B o C:

- Si A lo hizo, A es culpable
- Si C lo hizo, lo hizo con A, así que A también sería culpable en este caso
- Si B lo hizo, lo hizo con A o con C:
  - si lo hizo con A, A es culpable
  - si lo hizo con C, entonces también lo hizo con A, así que A es culpable

anto, A es culpable en cualquier caso

es una Deducción? (V)

deducción es una secuencia de afirmaciones en la progresamos a partir de la información conocida nisas), hasta alcanzar otra información desconocida nos interesa obtener (conclusión)

ue caracteriza una deducción correcta es que cada que demos sea "seguro":

a nueva información debe seguirse de las anteriores

es una Deducción? (VI)

en definirse reglas (de inferencia) que capten los
; típicos que se efectúan cuando se lleva a cabo una
cción

na regla está bien elegida, nos conducirá desde cierto enunciado
otro E’ que es consecuencia lógica de E

roceso por el que pasamos de E a E’ es una *inferencia lógica*

stema que utiliza esas reglas de inferencia para
ar deducciones es un cálculo deductivo

ntexto o marco formal en el que se utiliza ese
lo deductivo se llama sistema formal

lo Deductivo

vación para construir un cálculo deductivo:

cultad para determinar $\Gamma \vDash$ B por medios semánticos (Γ resenta un conjunto de fórmulas)

Confirmar la corrección de un argumento puede ser muy costoso

- En el caso de la Lógica proposicional, hay que explorar un número exponencialmente creciente de valoraciones

rnativa: determinar que **B se deduce de Γ** por medios ácticos: $\Gamma \vdash$ **B**

En lugar de razonar sobre el significado de las fórmulas (valoraciones), razonar sobre la forma de las fórmulas

Encontrar un procedimiento que nos permita construir una argumentación paso a paso, manipulando los símbolos de las fórmulas, sabiendo que cada paso es válido

Existen distintos tipos de cálculos deductivos (axiomáticos, de secuentes, de tablas analíticas, de deducción natural)

- Nosotros utilizaremos el **cálculo por deducción natural**

mas Formales (I)

álisis de la corrección de un argumento por medios cticos se hace siempre en un contexto o marco al, denominado **sistema formal**

 sistema formal *los símbolos carecen de significado*, manipularlos hemos de ser cuidadosos y no presuponer nada re sus propiedades, salvo lo que se especifique en el sistema

mas Formales (II)

stema formal de demostración consta de:

- lenguaje formal
  - Alfabeto y reglas sintácticas de formación de fórmulas
- conjunto de axiomas lógicos o axiomas (fórmulas válidas sin eba; podría ser vacío)
- conjunto de reglas de inferencia para demostrar fórmulas: un ulo
- definición de prueba o demostración

mas Formales (III)

teoría T es un sistema formal ampliado con un
ınto Γ de axiomas no lógicos o premisas (es decir,
e consideran como verdad): **T[Γ]**

= $\varnothing$ entonces T es la **teoría básica** del sistema formal

demostración o **prueba** de una fórmula B en una
a T[Γ] (**T[Γ] $\vdash$ B**) es una secuencia finita de fórmulas
ıe:

a fórmula de la secuencia es

un axioma o premisa de la teoría, o

el resultado de aplicar una regla de inferencia a fórmulas anteriores en la secuencia

; la última fórmula de la secuencia

mas Formales (IV)

eorema de una teoría $T[\Gamma]$ es una fórmula para la existe al menos una demostración en $T[\Gamma]$

$] \vdash B$ indica que B se deduce de $T[\Gamma]$ o que B es teorema de $T[\Gamma]$

se pide a un Sistema Formal?

ección: **Teorema de validez**

os los teoremas de T[Γ] son consecuencias lógicas de Γ:

si T[Γ] $\vdash$ B entonces $\Gamma \vDash$ B

pletitud: **Teorema de completitud**

la una teoría T[Γ], todas las consecuencias lógicas de Γ son remas de T[Γ]:

si $\Gamma \vDash$ B entonces T[Γ] $\vdash$ B

cálculo es correcto y completo entonces $\vdash$ y $\vDash$ son alentes

ucción Natural

guaje formal para la Lógica de Enunciados:

- Conectivas: $\neg$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, $\vee$, $\wedge$
- Conjunto enumerable de variables proposicionales: p, q, r, p1, p2, ..., pn
- Reglas sintácticas de formación de FBFs

hay axiomas lógicos

las de inferencia:

- Diez (dos por cada conectiva): introducción y eliminación

inición de demostración o prueba: una prueba de una fórmula una teoría es una secuencia finita de fórmulas en la que cada mento es:

- Una premisa o un **supuesto** temporal de la teoría, o bien
- El resultado de la aplicación de una regla de inferencia sobre fórmulas anteriores en la secuencia, y tal que

ltima fórmula de la secuencia es la fórmula probada

ma Formal para la Lógica Proposicional (II)

ostración o prueba:

se presenta una demostración: $T[p \to q, r \wedge \neg q] \vdash r \wedge \neg p$	
$\to q$	premisa
$\wedge \neg q$	premisa
	$\wedge_{elim2}(2)$
	MT(1,3)
	$\wedge_{elim2}(2)$
$\wedge \neg p$	$\wedge_{intro}(4,5)$

isas y Supuestos:

premisas corresponden a la información que nos viene dada de emano (los datos del problema o las fórmulas iniciales)

veces tenemos que introducir información hipotética para henzar un razonamiento: a esto que introducimos lo llamamos **uesto**

- Equivale a las ocasiones en que razonamos comenzando con "Supongamos que..."

ma Formal para la Lógica Proposicional (III)

isas y Supuestos:

bas son fórmulas añadidas a una teoría básica T y que pueden recer en una prueba sin requerir demostración

- Las premisas se añaden permanentemente
- Los supuestos se incorporan temporalmente

e significa usar un supuesto es lo siguiente:

pongamos que A»

tonces demuestro (usando A) que B»

realidad acabo de mostrar que si tuviera A como premisa, onces podría demostrar B»

r el teorema de deducción, eso equivale a decir que he nostrado la implicación A $\rightarrow$ B»

cción Natural: Reglas de Inferencia (I)

as de inferencia:

reglas que nos permiten justificar nuestras deducciones de clusiones a partir de premisas dadas

reglas se suelen expresar de esta manera:

$$\frac{[\text{premisas}]}{[\text{conclusión}]}$$

- Premisas: condiciones que tienen que cumplirse para aplicar la regla
- Conclusión (o resolvente): resultado de la aplicación de la regla

reglas de deducción natural son 10, dos por conector:

- Reglas de la conjunción
- Reglas de la disyunción
- Reglas de la negación
- Reglas del condicional
- Reglas del bicondicional

...cción Natural: Reglas de Inferencia (II)

... definición de las reglas de inferencia vamos a usar ..., que no son símbolos de proposición, sino variables ...e formulas del lenguaje (metavariables)

...ante metavariables podemos razonar sobre ...ntos (infinitos) de formulas que comparten una ...a forma lógica

... ejemplo: $A \wedge \neg A$ agrupa

$p \wedge \neg p$, $q \wedge \neg q$, $r \wedge \neg r$, ...

$(p \rightarrow q) \wedge \neg(p \rightarrow q)$, $(q \vee r) \wedge \neg(q \vee r)$, ...

$((p \rightarrow q) \wedge r) \wedge \neg((p \rightarrow q) \wedge r)$, $(p \vee q \rightarrow r \wedge s) \wedge \neg(p \vee q \rightarrow r \wedge s)$, ...

Etc.

ción Natural: Reglas de Inferencia (III)

regla de inferencia es una **metaregla** con infinitas ncias

entonces $p \vee q$; si p entonces $p \vee (q \wedge \neg r)$; ...

$\rightarrow q)$ entonces $(p \rightarrow q) \vee (q \wedge r)$; si $(p \rightarrow q)$ entonces $(p \rightarrow q) \vee$

En general: si A entonces $A \vee B$

s Básicas: Conjunción (I)

a de Introducción de Conjunción $\wedge$ ($I_\wedge$)

$$\frac{A \qquad B}{A \wedge B}$$

$T[p, q] \vdash p \wedge q$	
1. p	premisa
2. q	premisa
3. $p \wedge q$	**$I_\wedge$ (1,2)**

plo:

misas:

El asesino es diestro

El asesino calza un 43

clusión:

El asesino es diestro y calza un 43

s Básicas: Conjunción (II)

a de Eliminación de Conjunción $\land$ ($E_{\land}$)

$$\frac{\quad B}{\ } \qquad \frac{A \land B}{B}$$

$T[p \land q] \vdash p$	
1. $p \land q$	premisa
2. p	**$E_{\land}$ (1)**

$T[p \land q] \vdash q$	
1. $p \land q$	premisa
2. q	**$E_{\land}$ (1)**

plo:

misa:

El asesino es cojo y usa boina

clusion:

El asesino es cojo

bien

El asesino usa boina

s Básicas: Disyunción (I)

la de Introducción de Disyunción $\vee$ ($I_\vee$)

$$\frac{A}{B \vee A}$$

$T[p] \vdash p \vee q$	
1. p	premisa
2. $p \vee q$	**$I_\vee$ (1)**

$T[p] \vdash q \vee p$	
1. p	premisa
2. $q \vee p$	**$I_\vee$ (1)**

nplo:

emisa:

El asesino mide 1,92 m

nclusion:

El asesino mide 1,92 m o veranea en Ibiza

bien

El asesino veranea en Ibiza o mide 1,92 m

s Básicas: Disyunción (II)

la de Eliminación de Disyunción $\vee$ ($E_{\vee}$) o <u>Prueba por</u> <u>os</u>

$$\begin{array}{c} A \vee B \\ A \rightarrow C \\ B \rightarrow C \\ \hline C \end{array}$$

$T[p \vee q, p \rightarrow \neg r, q \rightarrow \neg r] \vdash \neg r$

1.	$p \vee q$	premisa
2.	$p \rightarrow \neg r$	premisa
3.	$q \rightarrow \neg r$	premisa
4.	$\neg r$	**$E_{\vee}$ (1,2,3)**

nplo:

emisas:

El asesino huyó en furgoneta o en bici

Si huyó en furgoneta, se esconde en Málaga

Si huyó en bici, se esconde en Málaga

nclusion:

El asesino se esconde en Málaga

lo

$\wedge (p \vee q), p \rightarrow \neg r, q \rightarrow \neg r] \vdash s \wedge \neg r$

$s \wedge (p \vee q)$	premisa
$p \vee q$	E$\wedge$ (1)
$p \rightarrow \neg r$	premisa
$q \rightarrow \neg r$	premisa
$\neg r$	E$\vee$ (2,3,4)
s	E$\wedge$ (1)
$s \wedge \neg r$	I$\wedge$ (5,6)

a de Eliminación de Negación ¬ ($E_\neg$)

$\neg A$

A

plo:

misas:

No es el caso que el vecino no fume puros

clusión:

El vecino fuma puros

s Básicas: Implicación

la de Eliminación de Implicación $\rightarrow$ ($E_{\rightarrow}$) o Modus ens (MP)

$$\frac{A \rightarrow B \qquad A}{B}$$

$T[p \rightarrow \neg r, \neg r \rightarrow q, p] \vdash q$		
1.	$p \rightarrow \neg r$	premisa
2.	p	premisa
3.	$\neg r$	**$E_{\rightarrow}$ (1,2)**
4.	$\neg r \rightarrow q$	premisa
5.	q	**$E_{\rightarrow}$ (3,4)**

nplo:

emisas:

Si Ramírez es culpable entonces Bárbara le está encubriendo

Ramírez es culpable

nclusión:

Bárbara está encubriendo a Ramírez

s Básicas: Doble Implicación (I)

a de Introducción de Doble Implicación $\leftrightarrow$ ($I_{\leftrightarrow}$)

$\rightarrow$ B

$\rightarrow$ A

$\leftrightarrow$ B

$T[p \rightarrow \neg r, \neg r \rightarrow p] \vdash p \leftrightarrow \neg r$		
1.	$p \rightarrow \neg r$	premisa
2.	$\neg r \rightarrow p$	premisa
3.	$p \leftrightarrow \neg r$	$I_{\leftrightarrow}$ (1,2)

plo:

misas:

Si el asesino huyó en furgoneta entonces bebe tequila

Si el asesino bebe tequila entonces huyó en furgoneta

clusión:

El asesino huyó en furgoneta si y sólo si bebe tequila

s Básicas: Doble Implicación (II)

a de Eliminación de Doble Implicación $\leftrightarrow$ ($E_{\leftrightarrow}$)

$$\frac{\;\;B}{\;\;B} \qquad \frac{A \leftrightarrow B}{B \rightarrow A}$$

$T[p \leftrightarrow q \wedge r, p] \vdash r$		
1.	$p \leftrightarrow q \wedge r$	premisa
2.	$p \rightarrow q \wedge r$	**$E_{\leftrightarrow}$ (1)**
3.	p	premisa
4.	$q \wedge r$	$E_{\rightarrow}$ (2,3)
5.	r	$E_{\wedge}$ (4)

plo:

misa:

Ramírez es culpable si y sólo si ama a Bárbara

clusión:

Si Ramírez es culpable entonces ama a Bárbara

bien

Si Ramírez ama a Bárbara entonces es culpable

los (I)

$, p \rightarrow q] \vdash p \land q$

	p	premisa
	$p \rightarrow q$	premisa
	q	$E\rightarrow$ (1,2)
	$p \land q$	$I\land$ (1,3)

$\land q \rightarrow r, q \rightarrow p, q] \vdash r$

	$p \land q \rightarrow r$	premisa
	$q \rightarrow p$	premisa
	q	premisa
	p	$E\rightarrow$ (2,3)
	$p \land q$	$I\land$ (4,3)
	r	$E\rightarrow$ (1,5)

plos (II)

$\wedge (q \wedge r)] \vdash (p \wedge q) \wedge r$

$p \wedge (q \wedge r)$	premisa
p	E$\wedge$ (1)
$q \wedge r$	E$\wedge$ (1)
q	E$\wedge$ (3)
r	E$\wedge$ (3)
$p \wedge q$	I$\wedge$ (2,4)
$(p \wedge q) \wedge r$	I$\wedge$ (6,5)

$\wedge q) \wedge r] \vdash p \wedge (q \wedge r)$

los (III)

$\rightarrow (q \rightarrow r), p \rightarrow q, p] \vdash r$

1	$p \rightarrow (q \rightarrow r)$	premisa
2	$p \rightarrow q$	premisa
3	p	premisa
4	q	$E\rightarrow$ (2,3)
5	$q \rightarrow r$	$E\rightarrow$ (1,3)
6	r	$E\rightarrow$ (4,5)

s Básicas: Supuestos (I)

quedan dos reglas básicas por definir:

- oducción de la negación o prueba por reducción al absurdo
- oducción de la implicación o teorema de la deducción

as se basan en el **empleo de supuestos**, que pueden ecer en una prueba sin requerir demostración

upuestos se **añaden** sólo **temporalmente**:

- supuesto se introduce en un determinado punto de la prueba y ancela (descarga) en otro punto posterior
- ndo se introduce un supuesto hay que mover la siguiente uencia de fórmulas hacia la derecha, hasta descargar (o olver, o cancelar) el supuesto con $I_{\rightarrow}$
- no resultado de la cancelación, una nueva fórmula queda nostrada

s Básicas: Supuestos (II)

a de Introducción de Implicación $\rightarrow$ ($I_{\rightarrow}$) o Teorema Deducción

upuesto)

B

$\rightarrow$ B

$T[p \rightarrow q, q \rightarrow r] \vdash p \rightarrow r$		
1.	$p \rightarrow q$	premisa
2.	$q \rightarrow r$	premisa
3.	p	supuesto
4.	q	$E_{\rightarrow}$ (1,3)
5.	r	$E_{\rightarrow}$ (2,4)
6.	$p \rightarrow r$	**$I_{\rightarrow}$ (3,5)**

El **supuesto** se introduce en la línea 3 y se cancela en la línea 5

Como resultado de esta cancelación, queda demostrada la fórmula 6

La fórmula 6 (**conclusión**) es un condicional, que tiene como antecedente el supuesto que hemos introducido y como consecuente el enunciado que hemos obtenido a partir de ese supuesto, aplicando reglas de inferencia

plo:

uesto:

(supongamos que) la víctima fue envenenada

……….. bla, bla, bla ……….. (secuencia de inferencias válidas)

el asesino es el conde Lequio

clusión:

Si la víctima fue envenenada entonces el asesino es el conde Lequio

estos y el Teorema de la Deducción

ulación genérica de la **regla de introducción de la cación**:

ndo T[A1, A2, ..., An] una teoría básica ampliada con un conjunto n premisas, si la incorporación como supuesto de un fórmula A mite deducir otra fórmula B:

T[A1, A2, ..., An] ∪ {A} ⊢ B

onces

T[A1, A2, ..., An] ⊢ A → B

ema de la Deducción: En general, tanto para isas como para supuestos:

] ⊢ B si y sólo si T ⊢ A → B

los

$q \rightarrow (p \wedge \neg r)] \vdash \neg q \rightarrow \neg r$

	$\neg q \rightarrow (p \wedge \neg r)$	premisa
2.	$\neg q$	supuesto
3.	$p \wedge \neg r$	E$\rightarrow$ (1,2) o MP (1, 2)
4.	$\neg r$	E$\wedge$ (3)
	$\neg q \rightarrow \neg r$	I$\rightarrow$ (2,4)

$\rightarrow q, q \rightarrow r] \vdash p \rightarrow q \wedge r$

	$p \rightarrow q$	premisa
	$q \rightarrow r$	premisa
3.	p	supuesto
4.	q	E$\rightarrow$ (1,3)
5.	r	E$\rightarrow$ (2,4)
6.	$q \wedge r$	I$\wedge$ (4,5)
	$p \rightarrow q \wedge r$	I$\rightarrow$ (3,6)

…s Básicas: Supuestos (III)

…a de Introducción de Negación ¬ ($I_\neg$) o Prueba por …cción al Absurdo

…uesto)

…B

$$\frac{A \rightarrow B \wedge \neg B}{\neg A}$$

$T[\neg p \rightarrow q \wedge \neg q] \vdash p$		
1.	$\neg p \rightarrow q \wedge \neg q$	premisa
2.	$\neg p$	supuesto
3.	$q \wedge \neg q$	MP (1,2)
4.	$\neg\neg p$	**$I_\neg$ (2,3)**
5.	p	$E_\neg$ (4)

El **supuesto** corresponde a la negación de aquello que intentamos concluir

Si alcanzamos una **contradicción** (se cancela el supuesto), significa que nuestro supuesto inicial era erróneo

La **conclusión** es la negación del supuesto

…plo:

…uesto:

(supongamos que) el asesino no huyó a Málaga

……….. bla, bla, bla ……….. (secuencia de inferencias válidas)

Ramírez es dentista y no es dentista

…clusión:

El asesino huyó a Málaga

plo

$p \leftrightarrow q, \neg q] \vdash p$

	$\neg p \leftrightarrow q$	premisa
	$\neg q$	premisa
3.	$\neg p$	supuesto
4.	$\neg p \rightarrow q$	$E\leftrightarrow$ (1)
5.	q	MP (3, 4) o $E\rightarrow$ (3,4)
6.	$q \wedge \neg q$	$I\wedge$ (2,5)
	$\neg\neg p$	$I\neg$ (3,6)
	p	$E\neg$ (7)

cio

nostrar con reglas básicas T $[p \to q] \vdash \neg q \to \neg p$

$\to q$		premisa
. $\neg q$		supuesto
	3. p	supuesto
	4. q	$E\to$ (1,3)
	5. $\neg q$	ident (2)
	6. $q \wedge \neg q$	$I\wedge$ (4,5)
. $p \to q \wedge \neg q$		$I\to$ (3,6)
. $\neg p$		$I\neg$ (7)
$\to \neg p$		$I\to$ (2,8)

cio

nostrar con reglas básicas $T[q \rightarrow r, p \rightarrow s, q \vee p] \vdash r \vee s$

	$q \rightarrow r$	premisa
	$p \rightarrow s$	premisa
	$q \vee p$	premisa
4.	q	supuesto
5.	r	MP (1,4)
6.	$r \vee s$	Iv (5)
	$q \rightarrow r \vee s$	I$\rightarrow$ (4,6)
8.	p	supuesto
9.	s	MP (2,8)
10.	$r \vee s$	Iv (9)
	$p \rightarrow r \vee s$	I$\rightarrow$ (8,10)
	$r \vee s$	E$\rightarrow$ (3,7,11)

…edimiento General de Deducción (I)

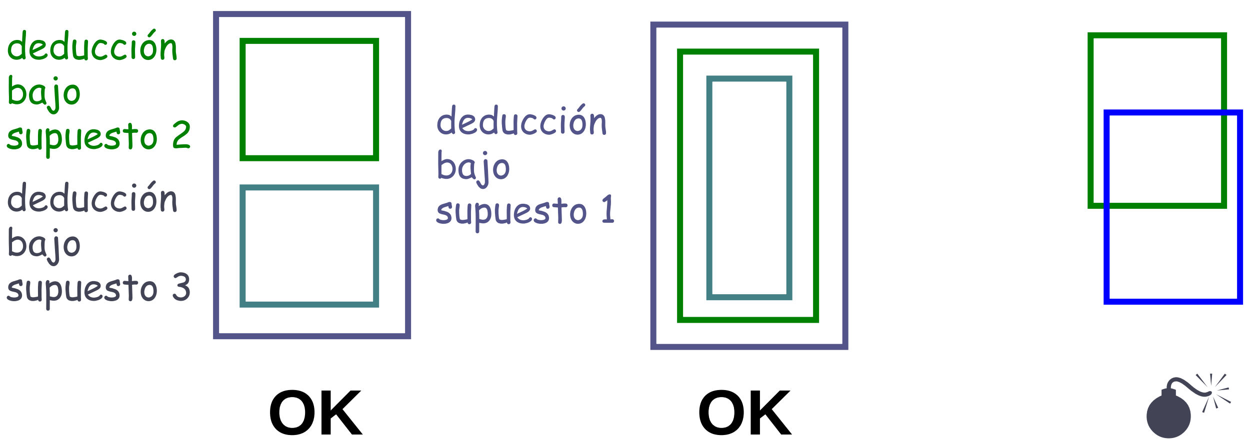
- …a premisa y cada nueva fórmula obtenida mediante … reglas de inferencia se escribe en una línea …erada (comenzando por el 1)
- …prueba termina cuando llegamos a una línea, fuera … todo supuesto no cancelado, que contiene la …nula que queremos deducir (demostrar, probar)

...dimiento General de Deducción (II)

...den introducirse tantos supuestos como se deseen ... la cancelación de los mismos ha de hacerse con ...ado

... **región de un supuesto** es la secuencia de líneas entre la ...roducción del supuesto (inclusive) y su descarga (no inclusive): ...sicamente, la parte que se desplaza a la derecha

- Puede haber regiones anidadas (la que empieza antes termina después)
- Puede haber regiones totalmente separadas (no comparten líneas)



cios

$\rightarrow (q \wedge s), \neg(q \wedge s)] \vdash \neg r$

$\rightarrow q, r \wedge \neg q] \vdash r \wedge \neg p$

$] \vdash q \rightarrow p$

$\rightarrow (q \rightarrow r)] \vdash (p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)$

$p \rightarrow \neg q] \vdash (\neg p \rightarrow q) \rightarrow p$

$p \rightarrow \neg q] \vdash q \rightarrow p$

$\rightarrow q, q \rightarrow r] \vdash p \rightarrow r$

$\rightarrow (q \rightarrow r), q] \vdash p \rightarrow r$

...s Derivadas (I)

...stintas demostraciones se repiten con frecuencia los ...os pasos (patrones)

...q ∧ s), ¬(q ∧ s)] ⊢ ¬r	
...q ∧ s)	premisa
... s)	premisa
r	*supuesto*
q ∧ s	*$E_{\rightarrow}$ (1,3)*
(q ∧ s) ∧ ¬(q ∧ s)	*$I_{\wedge}$ (2,4)*
...q ∧ s) ∧ ¬(q ∧ s)	*$I_{\rightarrow}$ (3,5)*
	$I_{\neg}$ (6)

T[p ⟶ q, r ∧ ¬q] ⊢ r ∧ ¬p	
1. p ⟶ q	premisa
2. r ∧ ¬q	premisa
3. ¬q	E ∧ (2)
4. p	*supuesto*
5. q	*$E_{\rightarrow}$ (1,4)*
6. q ∧ ¬q	*$I_{\wedge}$ (3,5)*
7. p ⟶ q ∧ ¬q	*$I_{\rightarrow}$ (4,6)*
8. ¬p	$I_{\neg}$ (7)
9. r	$E_{\wedge}$ (2)
10. r ∧ ¬p	$I_{\wedge}$ (8,9)

...que son distintas las fórmulas que aparecen en estos dos ...mplos, las líneas destacadas tienen una **estructura común**

...ríamos acortar las dos demostraciones si previamente ...nostramos con carácter general que

T[A→B, ¬B] ⊢ ¬A, para cualesquiera fórmulas A y B

as Derivadas (II)

as derivadas:

reglas que nos permiten justificar nuestras deducciones de clusiones a partir de premisas dadas

recen porque en ocasiones es frecuente encontrar estructuras o os que se repiten con frecuencia en las demostraciones

De esta forma es posible acortar las demostraciones

plos:

las para la negación

las para la implicación

las de De Morgan

las de corte

s Derivadas (III)

reglas derivadas se representan como las reglas as

B

Modus Tollens (MT)

T[A ⟶ B, ¬B] ⊢ ¬A	
1. A ⟶ B	premisa
2. ¬B	premisa
3. A	supuesto
4. B	$E_{\rightarrow}$ (1,3)
5. B ∧ ¬B	$I_{\wedge}$ (2,4)
6. A ⟶ B ∧ ¬B	$I_{\rightarrow}$ (3,5)
7. ¬A	$I_{\neg}$ (6)

emostraciones anteriores quedarían ahora

(q ∧ s), ¬(q ∧ s)] ⊢ ¬r	
(q ∧ s)	premisa
s)	premisa
	MT (1,2)

T[p ⟶ q, r ∧ ¬q] ⊢ r ∧ ¬p	
1. p → q	premisa
2. r ∧ ¬q	premisa
3. ¬q	E ∧ (2)
4. ¬p	**MT (1,3)**
5. r	$E_{\wedge}$ (2)
6. r ∧ ¬p	$I_{\wedge}$ (4,5)

…s Derivadas (IV)

… son las **reglas derivadas de uso más frecuente** …*da como ejercicio su demostración a partir de las* …*s básicas*)

…las de contradicción:

$T[A \wedge \neg A] \vdash B$ — Ex Contradictione Quodlibet

…las para la implicación:

$T[A \rightarrow B, B \rightarrow C] \vdash A \rightarrow C$ — Transitividad

$T[A \rightarrow B, \neg B] \vdash \neg A$ — Modus Tollens

…las de corte (silogismo disyuntivo):

$T[A \vee B, \neg A] \vdash B$ — Corte

$T[A \vee B, \neg B] \vdash A$ — Corte

$T[A \vee B, \neg A \vee C] \vdash B \vee C$ — Corte

ema de intercambio (o sustitución)

una fórmula y B1 una subfórmula de A, si

1 $\leftrightarrow$ B2

esulta de sustituir en A todas o algunas de las apariciones de B1 B2

nces

’

(De una fórmula A y de la equivalencia B1$\leftrightarrow$B2 se deduce A’, el resultado de sustituir en A todos o algunos de los B1 por B2)

$T[p \leftrightarrow r, q \rightarrow s, s \rightarrow t \wedge r] \vdash q \rightarrow t \wedge p$

1.	$q \rightarrow s$	premisa
2.	$s \rightarrow t \wedge r$	premisa
3.	q	supuesto
4.	s	E$\rightarrow$ (1,3)
5.	$t \wedge r$	E$\rightarrow$ (2,4)
6.	$p \leftrightarrow r$	premisa
7.	$t \wedge p$	**Intercambio (5,6)**
8.	$q \rightarrow p \wedge t$	I$\rightarrow$ (3,8)

cción Natural en la Práctica

› conclusión, ¿qué podemos utilizar para demostrar rrección de una argumentación mediante deducción ral?

10 reglas básicas

reglas derivadas mencionadas previamente

en ocasiones se piden demostraciones sin usar estas reglas

teorema de) intercambio

ADA MÁS

cios (I)

ostrar usando deducción natural y empleando mente reglas básicas, las siguientes estructuras ctivas (justificar cada paso):

$\rightarrow q] \vdash (p \vee r) \rightarrow (q \vee r)$

$] \vdash \neg \neg p$

$\rightarrow q, q \rightarrow r] \vdash (p \rightarrow \neg r) \rightarrow \neg p$

$\rightarrow q \vee r, q \rightarrow s, r \rightarrow s, \neg s] \vdash \neg p$

cios (II)

ostrar la corrección de las siguientes deducciones ante deducción natural (justificar cada paso):

$\rightarrow q, \neg r \vee q \rightarrow s] \vdash \neg (p \wedge \neg s)$

$p \vee q, q \vee r \rightarrow s, \neg r \rightarrow p] \vdash s$

$(p \wedge q) \rightarrow r] \rightarrow [(p \wedge \neg r) \rightarrow \neg q]$

cios (III)

ostrar usando deducción natural y empleando ımente reglas básicas, la siguiente estructura ctiva (justificar cada paso):

$\wedge (q \vee r)] \vdash (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

ostrar el siguiente teorema usando Deducción ral (se pueden aplicar reglas derivadas):

$p \leftrightarrow \neg s] \vdash s \vee \neg p \rightarrow \neg p$

ar, de forma razonada, si hay o no algún fallo en la ente demostración por deducción natural

$T\ [p \rightarrow q] \vdash p \vee q$

1.	$p \rightarrow q$	Premisa
2.	$\neg p \vee q$	Def $\rightarrow$ 1
3.	q	Elim $\vee$ 2
4.	$p \vee q$	Int $\vee$ 3

cios (IV)

alizar y probar la validez de los siguientes nentos (usando deducción natural):

puede suceder a la vez que estemos en verano y nieve en illa. Si estamos en verano, hará calor en Sevilla. Si no nieva en illa, no hará calor en Sevilla. Así pues, no estamos en verano

condición necesaria y suficiente para que la humanidad sea e es que los seres humanos no estén ligados por una esencia. Si s creó a los humanos, entonces estamos ligados por una ncia. Los humanos somos libres. Por tanto, Dios no creo a los nanos o los elefantes vuelan

educción Natural en Lógica Proposicional

Curso 2014-2015

Mari Carmen Suárez de Figueroa Baonza
mcsuarez@fi.upm.es

POLITÉCNICA